استدلال و گفتمان در کلاس درس ریاضی
با استفاده از نظریه بازی‌ها

آموزش‌وپرورش و برنامه‌ریزان ریاضی کشور باید در تنظیم و برنامه‌ریزی محتوای کتاب‌های درسی و برنامه‌های آموزشی به‌گونه‌ای عمل کنند تا شرایط مناسب برای تدریس، ایجاد انگیزه، فهم مطالب و توسعهٔ مهارت‌های تفکر و استدلال دانش‌آموزان، فراهم شود

سیدحسن علم‌الهدایی
هیئت علمی دانشگاه فردوسی مشهد
فهیمه کلاهدوز
دانشجوی دکتری ریاضی با گرایش آموزش ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

یکی از مهارت‌ها و توانایی‌هایی که در ریاضیات مدرسه‌ای مورد تأکید جامعهٔ آموزش ریاضی است، مهارت استدلال کردن است؛ البته استدلالی که به‌صورت منطقی و نظام‌وار باشد. اغلب محققان و آموزشگران ریاضی، ایجاد فرصت‌های بحث و گفت‌وگو در کلاس درس را در قالب ریاضیات غیررسمی، به‌عنوان یکی از روش‌های مؤثر برای پرورش مهارت استدلالی دانش‌آموزان توصیه می‌نمایند. در این راستا، یکی از فعالیت‌هایی که می‌تواند به‌صورت فردی و گروهی انجام پذیرد و مهارت استدلالی دانش‌آموزان را به‌کار گیرد، مدل‌سازی ریاضی فعالیت‌های روزانه است. در واقع تجربهٔ تدریس محققان، نشان می‌دهد که ورود مبحث «نظریهٔ بازی‌ها[1]» به آموزش ریاضیات مدرسه‌ای، می‌تواند فرصت‌های بحث و گفتمان و استدلال منطقی را در دانش‌آموزان فراهم آورد. در این مقاله، هدف آن است که با برخی از مفاهیم اساسی «نظریهٔ بازی‌ها» و نمونه‌هایی از مدل‌سازی رویدادها در قالب این نظریه آشنا شویم. هم‌چنین، در مورد استفاده از بازی‌های استراتژیک در کلاس درس توضیحاتی ارائه خواهد شد.

کلیدواژه‌ها: نظریهٔ بازی‌ها و استدلال، استدلال ریاضی دانش‌آموزان، گفتمان ریاضی

مقدمه

کوهن[2] (۲۰۰۸) در کتاب «آموزش، برای تفکر[3]»، با بیان سؤالاتی مرتبط با اهداف آموزش مدرسه‌ای، مخاطب را با چالش‌هایی مواجه می‌کند، مانند اینکه کدام مهارت‌های فکری برای دانش‌آموزان ضروری است؟ جهت دست‌یابی به این مهارت‌ها، لازم است دانش‌آموزان با چه فعالیت‌هایی آشنا شوند و چه

دانشی را کسب نمایند؟ چرا برخی از مهارت‌ها، بیش از بقیه اهمیت دارند و آن‌ها را شایستهٔ سرمایه‌گذاری می‌دانیم؟ کوهن در ادامه، بیان می‌کند که اگر به این پرسش‌ها، پاسخ‌های منطقی داده شود و بهترین روش‌ها هم برای تسلط کافی دانش‌آموزان به مهارت‌های مورد نیاز، تعیین گردد؛ باز هم چالش دیگری باقی می‌ماند. این چالش این است که آیا دانش‌آموزان، این مهارت‌ها را آن‌قدر باارزش می‌دانند که با علاقه، به تمرین آن‌ها بپردازند و آیا این مهارت‌ها را در زمان و مکان مناسب به‌کار گرفته و دلیل استفاده از آن‌ها را می‌دانند؟

متخصصان تعلیم‌وتربیت، با تأکید بر اهمیت تفکر اندیشمندانه و منطقی به‌عنوان یکی از مهارت‌های مورد نیاز افراد در زندگی، پرورش آن را یکی از هدف‌های اصلی تعلیم‌وتربیت می‌دانند. بر این اساس، آنان معتقدند که نظام آموزشی، به‌جای انتقال صرف اطلاعات به دانش‌آموزان، باید موقعیت‌های مناسبی را برای پرورش تفکر و توسعهٔ توانایی استدلال منطقی دانش‌آموزان، فراهم آورد (ملکی و حبیبی‌پور، ۱۳۸۵؛ حاجی‌حسینی‌نژاد و بالغی‌زاده، ۱۳۸۹).

با وجود اینکه مدرسه، مکان مناسبی برای پرورش تفکر و مهارت‌های استدلالی دانش‌آموزان است، اما همان‌گونه که آندرسون[۴] و همکاران (۲۰۰۰) بیان می‌نمایند، لازم است مشخص شود که آیا بین آموخته‌های دانش‌آموزان و توانایی آنان در حل مسائل زندگی حال و آینده، ارتباطی وجود دارد یا خیر (نقل شده در کوهن، ۲۰۰۸). لذا آموزش‌وپرورش و برنامه‌ریزان ریاضی کشور باید در تنظیم و برنامه‌ریزی محتوای کتاب‌های درسی و برنامه‌های آموزشی به‌گونه‌ای عمل کنند تا شرایط مناسب برای تدریس، ایجاد انگیزه، فهم مطالب و توسعهٔ مهارت‌های تفکر و استدلال دانش‌آموزان، فراهم شود.

هم‌چنین، میولر[۵] و همکاران (۲۰۱۰) معتقدند که اغلب دانش‌آموزان، موقعی که می‌خواهند تفکراتشان را توضیح دهند و توجیه نمایند، با مشکل مواجه می‌شوند. آن‌ها بیان می‌دارند که اگرچه ممکن است دانش‌آموزان بتوانند برخی از مسائل پیچیده را حل کنند، اما در اغلب موارد، قادر به توجیه راه‌حل‌هایشان نیستند و یا اینکه نمی‌توانند به‌خوبی، فرایند چگونگی رسیدن به جواب را توضیح دهند.

یکی از دلایل این مشکل، می‌تواند تأکید بیش از اندازهٔ معلمان در کلاس درس، بر روی یادگیری حقایق ریاضی، مهارت‌ها و رویه‌های مورد نیاز، تنها برای حل مسائل الگوریتمی و معمولی[۶] باشد. در این صورت، ممکن است توسعهٔ توانایی دانش‌آموزان برای استدلال‌کردن به تعویق بیفتد و تا زمانی که آنان مفاهیم مورد نظر را به‌طور کامل و به‌خوبی نفهمیده باشند، در به‌کارگیری این مفاهیم در استدلال و بحث‌هایشان با مشکل مواجه خواهند بود (میولر و همکاران، ۲۰۱۰). باید توجه نمود که در برخی مواقع، دانش‌آموزان نمی‌توانند شکل رسمی و نمادین استدلال‌های استنتاجی را به‌خوبی درک کنند. در این‌گونه موارد می‌توان برای شروع کار، با استدلال استنتاجی از شکل‌های غیررسمی آن در آموزش استفاده نمود.

از آنجایی‌که فرایند استدلال، اساس کار در ریاضیات است، لذا این فرایند برای یادگیری در ریاضیات مدرسه‌ای نیز، ضروری و مهم است. یاکل و حنّا[۷] (۲۰۰۳) تأکید می‌نمایند که باید برای همهٔ دانش‌آموزان، از همان اوایل تحصیلات در مدارس ابتدایی، محیط حمایتیِ مناسبی برای تأیید یا رد ادعاها ایجاد شود. تحقیقات نشان می‌دهد که تدریس صِرف الگوریتم‌ها، می‌تواند برای توسعهٔ استدلال دانش‌آموزان بی‌فایده و حتی مضر باشد (نقل شده در میولر، ۲۰۰۷).

به‌طور کلی، لازم است که معلم در کلاس درس، شرایطی فراهم آورد تا دانش‌آموزان بتوانند در یک فضای پویا، نظرات خود را بیان نموده و استدلال‌های یکدیگر را مورد نقد و بررسی قرار دهند و چگونگی متقاعد کردن دیگران را بیاموزند. همان‌گونه که کریمی‌فردین‌پور (۱۳۸۵) بیان می‌نماید، گفتمان یک بخش ضروری از ریاضی و جریان یاددهی و یادگیری است و هم‌چنین، وسیله‌ای است برای در میان گذاشتن اندیشه‌ها، عقیده‌ها و شفاف شدن آنچه که می‌دانیم. او در ادامه، بیان می‌دارد که گفتمان، می‌تواند مشاهدات غیررسمی را به‌سوی بحث‌هایی سوق دهد که حالت‌های خاص در مورد راه حل مسئله را، به نتایج عمومی و مجرد رهنمون شود.

براساس تجربه‌ای که نویسندهٔ دوم در کلاس

متخصصان تعلیم‌وتربیت، با تأکید بر اهمیت تفکر اندیشمندانه و منطقی به‌عنوان یکی از مهارت‌های مورد نیاز افراد در زندگی، پرورش آن را یکی از هدف‌های اصلی تعلیم‌وتربیت می‌دانند. بر این اساس، آنان معتقدند که نظام آموزشی، به‌جای انتقال صرف اطلاعات به دانش‌آموزان، باید موقعیت‌های مناسبی را برای پرورش تفکر و توسعهٔ توانایی استدلال منطقی دانش‌آموزان، فراهم آورد

درس خود در دورهٔ دبیرستان داشته، به‌نظر می‌رسد یکی از روش‌هایی که می‌تواند توانایی دانش‌آموزان را در استدلال منطقی پرورش دهد، مدل‌سازی فعالیت‌های مختلف در قالب بازی‌های استراتژیک و تحلیل نتایج این بازی‌ها به‌صورت فردی و گروهی است. بنابراین در این مقاله سعی بر این است که با ارائه مفاهیم اساسی «نظریهٔ بازی‌ها» و مدل‌سازیِ یک رویداد در قالب بازی‌های استراتژیک، اهمیت این فعالیت‌ها در کلاس درس، مشخص گردد.

ورود نظریهٔ بازی‌ها به دنیای آموزش

نظریهٔ بازی‌ها که بیش از نیم قرن پیش با مقالات فون نیومن و نَش[8] پایه‌ریزی شده است، شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که در بسیاری از علوم دیگر از جمله علوم اجتماعی، اقتصادی، زیست‌شناسی، مهندسی و غیره، مورد استفاده قرار گرفته است. نظریهٔ بازی‌ها تلاش می‌کند تا رفتار ریاضی حاکم بر یک موقعیت استراتژیک را مدل‌سازی کند. این موقعیت، زمانی پدید می‌آید که موفقیت یک فرد، وابسته به راهبردهایی باشد که دیگران انتخاب می‌کنند. در واقع، در یک بازی استراتژیک، سود هر بازیکن تنها در گرو رفتار خود او نبوده و متأثر از رفتار یک یا چند بازیکن دیگر نیز هست. هدف نهایی این نظریه، یافتن راه‌برد بهینه برای بازیکنان است (فریور، ۱۳۸۷؛ یگانگی‌دستگردی، ۱۳۸۹؛ عبدلی، ۱۳۹۰). یک بازی شامل مجموعه‌ای از بازیکنان، مجموعه‌ای از حرکت‌ها یا راه‌بردها[9] و نتیجه و مطلوبیت مشخصی برای هر ترکیب از راه‌بردهاست. پیروزی در هر بازی، تنها تابع شانس نیست، بلکه قوانین ویژهٔ خود را دارد و هر بازیکن در طی بازی، سعی می‌کند با به‌کارگیری آن قوانین، خود را به نقطهٔ بهینه و بُردِ بازی، نزدیک کند (یگانگی‌دستگردی، ۱۳۸۹).

نظریهٔ بازی‌ها تلاش می‌کند تا رفتار ریاضی حاکم بر یک موقعیت استراتژیک را مدل‌سازی کند. این موقعیت، زمانی پدید می‌آید که موفقیت یک فرد، وابسته به راهبردهایی باشد که دیگران انتخاب می‌کنند. در واقع، در یک بازی استراتژیک، سود هر بازیکن تنها در گرو رفتار خود او نبوده و متأثر از رفتار یک یا چند بازیکن دیگر نیز هست. هدف نهایی این نظریه، یافتن راه‌برد بهینه برای بازیکنان است

مفاهیم اصلی در نظریهٔ بازی‌ها

برای تعریف فضای بازی، مشخص کردن مفاهیم و عناصر زیر، ضروری است (ازبرن و روبینستین[10]، ۲۰۱۱؛ یگانگی دستگردی، ۱۳۸۹، عبدلی، ۱۳۹۰، طاهری، ۱۳۹۰)

بازیکنان[11]: بازیکنان در اصل، همان تصمیم‌گیرندگان بازی هستند. بازیکن می‌تواند شخص، شرکت، دولت و نظایر آن باشد. یکی از پیش‌فرض‌های مهم در نظریهٔ بازی‌ها، عاقلانه بودن[12] رفتار بازیکنان است. عاقلانه بودن به این معناست که هر بازیکن تنها در پی بیشینه کردن سود خود بوده و می‌داند که چگونه می‌تواند سود خود را بیشینه کند.

استراتژی (عمل)[13]: یک استراتژی، عملی است که بازیکن می‌تواند از مجموعه تصمیمات و اقداماتی که برایش ممکن است، انتخاب کرده و در نوبت خود آن را اجرا نماید.

تابع مطلوبیت[14] **(ترجیحات)**: ترجیحات یک بازیکن در اصل، مشوق‌های وی برای گرفتن یا نگرفتن یک تصمیم و نشان دهندهٔ نتیجه و سطح مطلوبیت بازیکن در صورت گرفتن تصمیم متناظر با آن است.

ترتیب بازی[15]: بدین معنی که در هر گامی از بازی، چه بازیگری حرکت می کند.

ساختار اطلاعاتی[16]: منظور این است که در هر لحظه از بازی، هر بازیکن چه اطلاعاتی را می‌تواند از حرکت‌ها و ترجیحات طرف مقابلش، دریافت کند.

خروجی‌های بازی[17]: یعنی وقتی بازی به انتها می‌رسد، چه نتایجی به بار می‌آید.

نمونه‌ای از بازی‌های استراتژیک و تحلیل آن‌ها در کلاس درس

معمای زندانی‌ها[18] (ازبرن و مارتین،۲۰۱۱)

بازی معمای زندانی‌ها از بازی‌های معروف و پرکاربرد در نظریه بازی‌هاست و بسیاری از فعالیت‌های رقابتی بر اساس این بازی، مدل‌سازی می‌شود. شرح بازی بدین صورت است که دو نفر، متهم به شرکت در یک سرقت ماشین دستگیر شده‌اند. پلیس شواهدی دارد که نشان می‌دهد آن دو نفر که همکار نیز هستند، با اجرای برنامه‌ای، کیف پولی را هم دزدیده‌اند، اما این شواهد پلیس، سرقت

جدول (۱). استراتژی‌های هر دو بازیکن در هر موقعیت مشخص در بازی معمای زندانی‌ها

	بازیکن اول		
		اعتراف کردن	اعتراف نکردن
بازیکن دوم	اعتراف کردن	۳ ۳	۰ ۵
	اعتراف نکردن	۵ ۰	۲ ۲

کیف پول به‌وسیلهٔ آنان را اثبات نمی‌کند. در صورتی سرقت کیف پول توسط هر کدام از این دزدان اثبات می‌شود که همکارش، علیه او اعتراف کند، یعنی بگوید دوستش کیف پول را دزدیده است. این دو، هر دو جداگانه مورد بازجویی قرار می‌گیرند. طی این بازجویی، با هریک از آن‌ها جداگانه به این صورت معامله می‌شود:

اگر دوستت را لو بدهی و او علیه تو اعتراف نکند، تو آزاد می‌شوی، ولی او به ۵ سال حبس محکوم خواهد شد (۲ سال به‌خاطر سرقت ماشین و ۳ سال به‌خاطر سرقت کیف پول). اگر هر دو یکدیگر را لو بدهید، هر دو به ۳ سال حبس محکوم خواهید شد و ۲سال زندان شما بخشیده می‌شود. اگر هیچ‌کدام همدیگر را لو ندهید، هر دو ۲سال به‌خاطر سرقت ماشین به زندان می‌روید.

در اینجا از دانش‌آموزان می‌خواهیم که این رویداد را به‌صورت یک بازی در نظر بگیرند و هر کدام از زندانی‌ها را بازیگر این بازی تصور کنند. سپس بررسی نمایند که اگر هر کدام از این بازیکنان عاقلانه فکر کند و فقط در فکر منفعت خودش باشد، شما پیش‌بینی می‌کنید که هر یک، کدام حالت را انتخاب می‌کند؟ آیا هر کدام از زندانی‌ها علیه دوستش اعتراف می‌کند یا خیر. از دانش‌آموزان بخواهید تمام حالت‌های ممکن را در یک جدول خلاصه کنند. شما هم می‌توانید هم‌زمان، این جدول را روی تابلو رسم کنید (جدول ۱).

دانش‌آموزان می‌توانند با فرض ثابت بودن بازی هر بازیگر، در مورد عملکرد رقیبش تصمیم بگیرند و نتیجه را اعلام کنند. نتیجهٔ نهایی آن است که پیش‌بینی می‌شود هر دو زندانی، اعتراف می‌کنند و هر کدام ۳ سال به زندان می‌روند. در اینجا می‌توانیم از دانش‌آموزان بخواهیم که بگویند «چرا حالت بهتر را از دست می‌دهند، یعنی حالتی که هر دو ۲ سال به زندان بروند؟». در واقع، هدف آن است که دانش‌آموز بدین گونه استدلال کند که چون هر دو به نفع خود فکر می‌کنند و هر کدام از آن‌ها به دنبال کسب بهترین نتیجه برای خود، یعنی آزاد شدن است، و به‌طرف مقابل نیز اعتماد ندارد، دوستش را لو می‌دهد و در نتیجه، هر دوی زندانی‌ها ضرر می‌کنند. شاید برای دانش‌آموزان این فرایند جالب باشد که به‌طور شهودی، به‌نظر می‌رسد باید هر دو اعتراف نکنند و لذا هر دو زندانی، کمتر ضرر کنند. اما مشاهده می‌کنند که بر اساس استدلال منطقی، اتفاق دیگری می‌افتد.

بسیاری از فعالیت‌های رقابتی روزمره را نیز می‌توان در قالب بازی‌های استراتژیک، مدل‌سازی کرد و از دانش‌آموزان خواست که در گروه‌های خود، در مورد نتایج بازی بحث کنند. به‌عنوان مثال، یکی از فعالیت‌هایی که به‌طور مکرر با آن مواجه می‌شویم، حق انتخاب از بین چند گزینه است. رویداد را این‌گونه برای دانش‌آموزان شرح می‌دهیم.

فرض کنید دو نفر با هم دوست هستند و تصمیم دارند چند ساعتی استراحت کنند، نفر اول پیشنهاد می‌کند که برای دیدن فیلم، به سینما بروند و نفر دوم، تماشای تئاتر را پیشنهاد می‌کند. هر کدام از این دو نفر به اختیار خود، تصمیم می‌گیرد که به سینما برود یا تماشای تئاتر را انتخاب کند. معلم می‌تواند در این مرحله، به اتفاق دانش‌آموزان و با در نظر گرفتن شرایط و رابطهٔ دوستی دو نفر، برای بازی قوانینی را طراحی کند. به‌عنوان مثال، فرض می‌کنیم که اگر هر کدام از این دو نفر به مکان مورد علاقه خود برود، ۱ امتیاز کسب می‌کند و چنانچه در کنار دوستش باشد، ۲ امتیاز کسب می‌کند. در واقع، بنا را بر این گذاشته‌ایم که درکنار هم بودن برای شخص، مهم‌تر از مکان مورد علاقهٔ اوست. حال از دانش‌آموزان می‌خواهیم که این رویداد را در قالب یک بازی مدل‌سازی کنند و عناصر بازی یعنی بازیکنان و

استراتژی‌های هر کدام از بازیگران را مشخص نمایند و با استدلال منطقی، پیش‌بینی نمایند که اگر هر دو بازیکن عاقلانه فکر کنند چه تصمیمی خواهند گرفت؟ جدول ۲، حالت‌های مختلف تصمیم‌گیری هر دو بازیکن را نشان می‌دهد.

جدول (۲). حالت‌های مختلف برای تصمیم‌گیری دو بازیکن در بازی تئاتر – سینما

	بازیکن اول		
		سینما	تئاتر
بازیکن دوم	سینما	۳ ۲	۰ ۰
	تئاتر	۲ ۲	۲ ۳

چنانچه دانش‌آموزان شرایط مسئله را درست بررسی کنند، به این نتیجه خواهند رسید که هر دو بازیکن، یا به سینما می‌روند و یا هر دو، تئاتر را انتخاب می‌کنند. این تصمیم‌گیری معمولاً در زندگی روزمرهٔ ما هم، به شرط عاقلانه فکر کردن، اتفاق می‌افتد.

در این دو مثال، هدف آن بود که با مدل‌سازی فعالیت‌های روزمره در قالب بازی‌های استراتژیک، آشنا شویم و نشان دهیم که می‌توان با انجام این نوع از فعالیت‌ها، توانایی استدلالی دانش‌آموزان را به‌کار گرفت.

فعالیت‌های رقابتی و اجتماعی ملموس دیگری را نیز می‌توان در قالب بازی‌های استراتژیک مدل‌سازی کرد. حتی در بسیاری از بازی‌ها، می‌توان دانش انتزاعی ریاضی دانش‌آموزان را به‌طور مستقیم به‌کار گرفت.چنان‌چه دانش‌آموزان نسبت به این نوع مسائل رغبت نشان دهند، می‌توان مفاهیم بیشتر و البته قابل فهمی را از این نظریه، برایشان ارائه داد؛ مفاهیمی هم‌چون تعادل نش[19]، تابع بهترین پاسخ و مفاهیمی از این قبیل که توانایی استدلال کردن دانش‌آموز را به‌خوبی به‌کار می‌گیرند. وبگاهی که می‌تواند هم برای معلمان و هم برای دانش‌آموزان در این زمینه منبع آموزشی مفید و مؤثری باشد، وبگاه www.kelasedars.org است که در آن، گروهی از دانشجویان با همت و اراده عالی، تصمیم گرفته‌اند تا مفاهیم این نظریه را با زبانی ساده و قابل فهم برای دانش‌آموزان ارائه دهند.

یکی از مهارت‌های مهم در جامعه و به‌ویژه در کلاس درس ریاضی، مهارت استدلال کردن است. البته استدلالی که هدف آموزش ریاضی است، استدلال منطقی است و نکته‌ای که دارای اهمیت است، این است که دانش‌آموز، به ضرورت این استدلال پی ببرد و برای آن ارزش قائل باشد و به‌طور آگاهانه، این نو ع استدلال را – هم در فعالیت‌های ریاضی و هم در فعالیت‌های روزمره– انتخاب کند

تجربهٔ ارائه این بازی‌ها و تحلیل آن‌ها در کلاس درس ریاضی، البته در ساعت‌هایی با برنامه‌ریزی قبلی، برای نویسندهٔ دوم و دانش‌آموزانش در پایهٔ سوم متوسطه رشتهٔ ریاضی رخ داده است. وی شاهد بوده که دانش‌آموزان، به‌خوبی و هدفمند استدلال می‌کنند و سعی بر متقاعد کردن همکلاسی‌هایشان دارند و این، همان هدف وی از آموزش این نظریه در کلاس درس بوده است.

نتیجه‌گیری

یکی از مهارت‌های مهم در جامعه و به‌ویژه در کلاس درس ریاضی، مهارت استدلال کردن است. البته استدلالی که هدف آموزش ریاضی است، استدلال منطقی است و نکته‌ای که دارای اهمیت است، این است که دانش‌آموز، به ضرورت این استدلال پی ببرد و برای آن ارزش قائل باشد و به‌طور آگاهانه، این نو ع استدلال را – هم در فعالیت‌های ریاضی و هم در فعالیت‌های روزمره– انتخاب کند. همان‌گونه که برخی از تحقیقات (به‌عنوان مثال، وبر[20]، ۲۰۰۵؛ هارل[21]، ۲۰۰۸؛ میولر و ماهر[22]، ۲۰۰۹؛ برودیه[23]، ۲۰۱۰) نشان می‌دهند، ایجاد فضایی مناسب برای بحث و گفت‌وگو در کلاس ریاضی به‌گونه‌ای که قابل کنترل و هدفمند باشد، می‌تواند در ارتقای توانایی استدلال دانش‌آموزان مؤثر واقع گردد. به گفتهٔ شونفلد (۱۹۹۴، نقل شده در غلام آزاد و گویا، ۱۳۸۵) دانش‌آموزان باید در یک فرهنگ ریاضی رشد کنند که در آن گفتمان ، تفکر و قانع کردن، بخش‌های مهمی از فعالیت‌های ریاضی آنان باشد. در این صورت است که اثبات‌ها، به‌عنوان بخش طبیعی ریاضیات آن‌ها دیده می شود. همان‌گونه که NCTM[24] (۲۰۰۰) پیشنهاد می‌کند، معلم می‌تواند در کلاس درس، با بیان سؤالاتی از قبیل اینکه «چرا فکر می‌کنید این درست است؟»، «آیا کسی فکر می‌کند که جواب چیز دیگری است؟»، «چرا این‌گونه فکر می‌کنید؟»، «آیا این حدس همواره درست است؟ چرا؟» و سؤالات مناسب دیگر، به دانش‌آموزان کمک کند تا بفهمند که تمام احکام و گزاره‌ها، باید با شواهد کافی تأیید یا رد شوند. علاوه بر این، از دانش‌آموزان خواسته شود که پاسخ‌های خود را هنگام حل مسئله تبیین نمایند و به آن‌ها کمک شود تا اعتبار

و دقت نتایجشـــان را مورد بررســـی قرار دهند. یکی از فعالیت‌هایی که به‌نظر می‌رسد به‌خوبی می‌تواند این فضا را ایجاد کند و شـــرایط را برای استدلال‌های منطقی در ریاضی و حل مســـائل، البته در ابتدا به‌طور غیررسمی، فراهم آورد، تحلیل بازی‌های استراتژیک در قالب نظریهٔ بازی‌هاست. تجربهٔ نویسندهٔ دوم نشان می‌دهد که این موضـــوع، قابلیت ورود به آموزش ریاضـــی را در کلاس درس دارد و می‌تواند به‌طور هدفمند، مهارت استدلالی دانش‌آموزان را به‌کار گیرد. امید اســـت که با تحقیقات بیشتر و عمیق‌تر، شرایط و نحوهٔ استفاده از این فعالیت‌ها در کلاس درس، به‌طور واضح و شفاف مشخص گردد.

پی‌نوشت‌ها

1.Games Theory
2. Kuhn
3. Education for Thinking
4. Anderson
5. Mueller
6. Rutine
7. Yackel & Hanna
8. von Neumann & Nash
9. Strategies
10. Osborne & Rubinstein
11. Players
12. Rational
13. action
14. Payoff Function
15. Order of play
16. Information set
17. Out come
18. Prisoner's Dilemma
19. Nash Equiblibrium
20. Weber
21. Harel
22. Maher
23. Brodie
24. National Council of Teachers of Mathematics: NCTM

منابع

۱. حاجی‌حســـینی‌نژاد، غلامرضا؛ بالغی‌زاده، سوســـن. (۱۳۸۹). **تأثیر آموزش مبتنی بر «تدریس برای فهمیدن» بر برنامه درســـی تجربه شـــدهٔ درس تاریخ هنـــر**، فصلنامهٔ مطالعات برنامه درسی ایران، ۱۷، ۵۵-۳۹.
۲. فریور، مسعود. (۱۳۸۷). **کاربرد نظریهٔ بازی در شبکه‌های بی‌سیم**. برگرفته از وبگاه
۳. عبدلی، قهرمان. (۱۳۹۰). **تئوری بازی‌ها و کاربردهای آن**. جهاد دانشگاهی (واحد تهران).
۴. غلام آزاد، ســـهیلا؛ گویـــا، زهرا. (۱۳۸۵). **نقـــش اثبات در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای**، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، ۸۳، ۱۰-۴.
۵. کریمی‌فردین‌پـــور، یونس. (۱۳۸۵). **اثبات و اســـتدلال در ریاضیات مدرسه‌ای**، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، ۸۳، ۲۱-۱۸. دفتر انتشـــارات کمک‌آموزشی، ســـازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.
۶. ملکی، حســـن؛ حبیبی‌پور، مجیـــد. (۱۳۸۵). **پرورش تفکر انتقادی هدف اساســـی تعلیم‌وتربیت**، فصلنامهٔ نوآوری‌های آموزشی، ۱۹، ۱۰۸-۹۳.
۷. یگانگی‌دستگردی، وحید. (۱۳۸۹). **تئوری بازی‌ها**. دانشنامهٔ اقتصاد شهر، شماره هشتم، ۱۴۱-۱۳۴.
8. Kuhn, Deanna (2008). *Education for thinking*. Harvard university.
9. Brodie, Karin (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms*, New York: springer, Retrieved May 10, 2011 from http://www.springer.com.
10. Harel, Guershon (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM Mathematics Education*. 40, 487–500
11. Mueller, Mary (2007). A study of the development of reasoning in sixth grade students, Unpublished doctoral dissertation, the state university of new Jersey, United States. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.
12. Mueller, Mary , Maher, Carolyn (2009). Learning to Reason in an Informal Math After-School Program, *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 21, No. 3, 7-35.
13. Mueller, M., Yankelewitz, D. & Maher, C. (2010). Rules without reason: Overcoming students' obstacles in learning. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 17(2/3), 307-320.
14. NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
Osborne , Martin& Ariel Rubinstein,2011. A course in game theory, MIT press
15. Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. J*ournal of Mathematical Behavior*, 24, 351-360.
16. Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In Kilpatrick, J., Martin, W. G., & Schifter, D. (Eds), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp.227-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
www.kelasedars.org